قضیه فوریه : اگر تابع $f(x)$ روی بازه $(-L, L)$ تکه‌ای پیوسته باشد و در هر قطعه مشتق چپ و راست داشته باشد ، در این صورت :

$$\left[f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L} x + b_n \sin\frac{n\pi}{L} x \right]$$

که در آن :

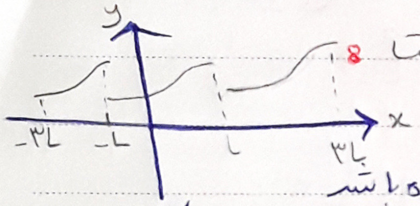
$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)dx \qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi}{L} x \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \sin\frac{n\pi}{L} x \, dx$$

← دقت کنید سری فوریه تابع متناوب با دوره تناوب $2L$ است . لذا اگر تابع $f(x)$ را با دوره تناوب $2L$ به کل $\mathbb{R}$ گسترش دهیم :

$$f(x + 2L) \Rightarrow f(x)$$

که در این صورت سری فوریه در کل $\mathbb{R}$ به این تابع گسترش یافته ، همگرا است :



به این ترتیب اگر بازه $f(x)$ در هر بازه به طول $(2L)$ تعریف شده باشد
سری فوریه آن به شکل فوق است (پس از گسترش به $\mathbb{R}$) و ضرایب را می‌توان با انتگرال گیری روی همان بازه که در ابتدا تعریف شده محاسبه کرد

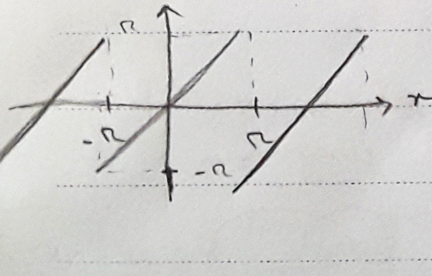
نکته : در نقاطی که تابع جهش دارد سری فوریه به میانگین تابع در آن نقاط همگرا است.

$$\frac{f(x_1^+) + f(x_1^-)}{2}$$

به خصوص این مورد در نقاط $(-L, L)$ ممکن است اتفاق بیافتد

مثال : سری فوریه تابع زیر را بنویسید

$$f(x) = x \qquad (-\pi < x < +\pi)$$



(متناوب بودن سری فوریه)

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L} x + b_n \sin\frac{n\pi}{L} x$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx \Rightarrow \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} \Rightarrow \frac{1}{2\pi}(\pi$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi}{L} x\, dx \Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cos\frac{n\pi}{\pi} x\, dx \Rightarrow 0$$

PAPCO

$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin n\frac{\pi}{\pi}x\,dx \Rightarrow$

x	$\sin nx$
1	$-\frac{1}{n}\cos nx$
0	$-\frac{1}{n^2}\sin nx$

$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx \Rightarrow \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Big|_0^{\pi}$

$\rightarrow \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi\right) \Rightarrow -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$

$x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx$

با قرار دادن $x=\frac{\pi}{2}$ داریم:

$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{2(2k-1)}(-1)^{2k}\sin\frac{2k-1}{2}\pi$

$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}(-1)^{k+1} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$

مثال ۳: سری فوریه تابع $f(x)=x^2$ را در بازه $(-\pi<x<\pi)$ مشخص در آورید.

$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{L}x + b_n\sin\frac{n\pi}{L}x$

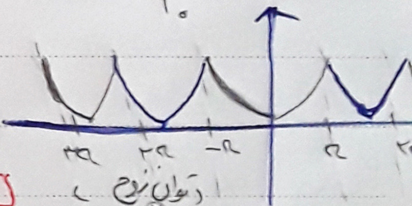
$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx \Rightarrow \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} \Rightarrow \frac{2}{3}\pi^2$

$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos\frac{n\pi}{\pi}x\,dx \Rightarrow \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx$

x^2	$\cos nx$
$2x$	$\frac{1}{n}\sin nx$
2	$-\frac{1}{n^2}\cos nx$
0	$-\frac{1}{n^3}\sin nx$

$\Rightarrow \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx + \frac{2x}{n^2}\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx\right)\Big|_0^{\pi}$

$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi}{n^2}\cos n\pi\right) = \frac{4}{n^2}(-1)^n$



$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \Rightarrow 0$

$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx \quad (-\pi<x<\pi)$

با قرار دادن $x=0$ داریم:

$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

با قرار دادن $x=\pi$ داریم:

$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos n\pi \Rightarrow \frac{2\pi^2}{3} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(-1)^n(-1)^n$

$\frac{\pi^2}{6} = \sum \frac{1}{n^2}$

PaPCO

با قرار دادن $x=\frac{\pi}{2}$ داریم: $\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos\frac{n\pi}{2}$

← اتحاد پارسوال:

$f(x)$ را در سری فوریه ضرب می‌کنیم:

$$f(x)\cdot\left[f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x\right] \Rightarrow$$

$$f(x)^2 = \frac{1}{2}a_0 f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x + b_n f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)\,dx = \frac{1}{2}a_0\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx\right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx\right) + b_n\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)^2\,dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)}$$

مثال ۳: اتحاد پارسوال را برای سری فوریه مثال ۲ (قبلی) به کار ببرید.

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)^2\,dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$ «فرمول اصلی»

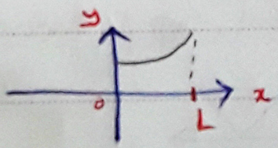
$f(x)$ و a_0 و a_n از مثال قبل است

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\pi^2\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}(-1)^n\right)^2 \qquad \left[\frac{16}{n^4}(-1)^{2n}\right]$$

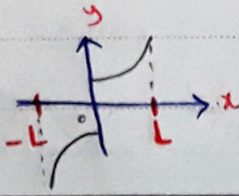
$$\frac{1}{\pi}\frac{x^5}{5}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{9}\pi^4 + 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \Rightarrow \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^5}{5} + \frac{\pi^5}{5}\right) = \frac{2}{9}\pi^4 + 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5}\pi^4 - \frac{2}{9}\pi^4 = 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \Rightarrow \frac{8}{45}\pi^4 = 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \Rightarrow \boxed{\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}}$$

۱- سری فوریه نیم دامنه سینوسی: اگر تابع $f(x)$ در بازه $[0, L]$ تعیین شده باشد و آن را به شکل فرد به بازه $[-L, L]$ گسترش دهیم.



$\Rightarrow$



$f(-x) = -f(x)$

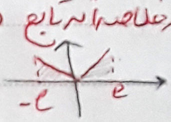
(عبارات انتگرالی $b\cos$ ها صفر می‌شود)

← در این صورت ضرائب سری فوریه آن عبارتند از:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0 \qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

به طور خلاصه اگر تابع $f(x)$ روی $[0, L]$ معین باشد سری فوریه سینوسی آن عبارتند از:



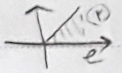
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x \qquad (0<x<L)$$

که در آن:

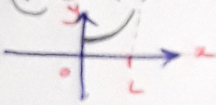
منفصل / متصل → محاسبه b_n داریم

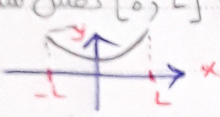
$$b_n = \frac{2}{L}\int f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

نکته: ۲ تا شکل در نظر می‌گیریم و بازه‌ی L تا L- را به یک بازه L تا ۰ در نظر می‌گیریم.



۲) سری فوریه نیم دامنه کسینوسی: اگر تابع $f(x)$ در بازه $[0, L]$ تعیین شده باشد و آن را به شکل زوج در بازه $[-L, L]$ گسترش دهیم $f(-x) = f(x)$





(عبارت انتگرالی sin در صفر می‌شود)

← در این صورت ضرائب سری فوریه آن عبارتند از:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \Rightarrow \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = 0$$

به طور خلاصه اگر تابع $f(x)$ روی $[0, L]$ معین باشد سری فوریه کسینوسی آن عبارتند از:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{L}x \qquad (0<x<L)$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

که در آن:

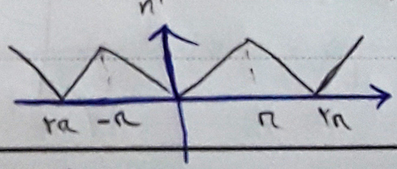
مثال: مطلوب است سری فوریه نیم دامنه کسینوسی تابع $f(x) = x$ در فاصله π را بنویسید.

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,dx \Rightarrow \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx \Rightarrow \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi} \Rightarrow \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos\frac{n\pi}{\pi}x\,dx \to \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x}{n}\cdot\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} \Rightarrow \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\cos n\ldots\right.$$

مشتق	انتگرال
x	$\cos nx$
1	$\frac{1}{n}\sin nx$
0	$-\frac{1}{n^2}\cos nx$

$$\boxed{\frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^n-1}{n^2}}$$



← استفاده x در فاصله π تا 2π

← سری کسینوسی را زوج گسترش می‌دهیم

مثال ۲: سری فوریه‌ی نیم دامنه سینوسی $f(x) = x^2$ در فاصله ی $(0, \pi)$ بنویسید.

$a_0 = 0$

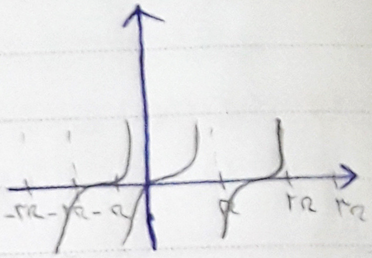
فقط با محاسبه b_n کار داریم → $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin \frac{n\pi}{\pi} x\,dx =$

به روش جزء به جزء

x^2	$\sin nx$
$2x$	$+\frac{1}{n}\cos nx$
2	$-\frac{1}{n^2}\sin nx$
0	$+\frac{1}{n^3}\cos nx$

$$\frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{-x^2}{n}\cos x + \frac{2x}{n^2}\sin nx + \frac{2}{n^3}\cos nx\right)\Big|_0^{\pi} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^2}{n}(-1)^n + \frac{2}{n^3}(-1)^n - \frac{2}{n^3}\right)$$



همین نمودار x^2 را به صورت سینوسی فرد گسترش می‌دهیم در فاصله 3π ، -3π

۳) سری فوریه انتگرالی: فرض کنید تابع $f(x)$ روی $(-\infty, +\infty)$ معین باشد و انتگرال زیر

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

موجود و متناهی باشد

همچنین تابع $f(x)$ روی هر زیربازه‌ی متناهی تکه‌ای هموار باشد در این صورت

$$f(x) = \int_0^{+\infty}\left(A(p)\cos px + B(p)\sin px\right)dp$$

سری فوق را سری فوریه انتگرالی تمام دامنه می‌نامیم

که در آن:

$$\begin{cases} A(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos px\,dx \\ B(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin px\,dx \end{cases}$$

اگر تابع $f(x)$ در $[0, +\infty)$ شرایط فوق را داشته باشد

$$f(x) = \int_0^{+\infty} A(p)\cos px\,dp$$

→ انتگرال فوریه کسینوسی $f(x)$ که در آن

$$A(p) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x)\cos px\,dx$$

همچنین انتگرال فوریه سینوسی تابع $f(x)$ در $[0, +\infty)$ عبارت است از:

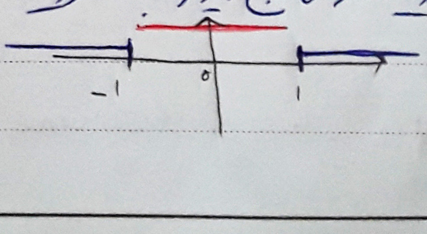
$$f(x) = \int_0^{+\infty} B(p)\sin px\,dp$$

→ انتگرال فوریه سینوسی $f(x)$ که در آن

$$B(p) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x)\sin px\,dx$$

مثال ۳: سری فوریه انتگرالی تابع زیر را بدست آورید

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$



$$F(x) = \int^1 A(p)\cos px + B(p)\sin p(x)\, dp$$

$$A(p) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 x\cos px\, dx \Rightarrow 0 \qquad B(p) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 x \sin px\, dx \Rightarrow \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos px\, dx$$

زوج فرد — فرد فرد

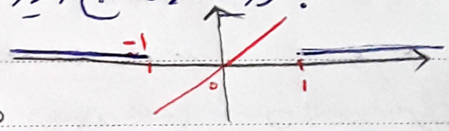
$$\frac{2}{\pi}\sin\frac{px}{p}\Big|_0^1 \Rightarrow \frac{2}{\pi}\frac{\sin p}{p}$$

جاگذاری در فرمول cos $F(x)$ در این فرمول به دلیل حاصل فرد شدن در انتگرال صفر می‌شود پس $A(p)$ صفر می‌شود و $B(p)$ جایگذاری

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin p}{p}\cos px\, dp \Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{\sin p\cos px}{p}\, dp \Rightarrow \begin{cases} \pi/2 & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$$

مثال ۴: سعی فوریه انتگرال تابع زیر را بدست آورید.

$$F(x) = \begin{cases} x & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$$



$$F(x) = \int_0^{+\infty} A(p)\cos p(x) + B(p)\sin p(x)\, dp$$

x	$\sin px$
(+) 1	$\frac{1}{p}\cos px$
(−) 0	$-\frac{1}{p^2}\sin px$

$$A(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\cos px\, dx \Rightarrow 0$$

چون در اینجا x و cos جو طرف تک فرد می‌کند صفر می‌کند

$$B(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\sin px\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^1 x\sin px\, dx \Rightarrow \frac{2}{\pi}\left(\frac{-x}{p}\cos px + \frac{1}{p^2}\sin px\right)\Big|_0^1$$

زوج فرد

Fx در $B(p)$ جاگذاری $\Leftarrow$ $\frac{2}{\pi}\left(\frac{-1}{p}\cos p + \frac{1}{p^2}\sin p\right)$

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin p}{p^2} - \frac{\cos p}{p}\right)\sin px\, dp \Rightarrow \int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin p}{p^2} - \frac{\cos p}{p}\right)\sin px\, dp = \begin{cases} \frac{\pi}{2}x & (|x|<1) \\ 0 & (|x|>1) \end{cases}$$

معادلات حرارت موج و پتانسیل:

جواب هر یک از معادلات حرارت $\frac{\partial u}{\partial t} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t)$ و موج $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t)$ تحت شرایط

مرزی $u(0,t) = u(L,t) = 0$

عبارت است از:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

و تحت شرایط مرزی $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$ عبارت است از:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\cos\frac{n\pi}{L}x$$

PAPCO

جواب معادله پواسون (دوبعدی): $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x,t)$ تحت شرایط مرزی $u(0,y) = u(L,y) = 0$

عبارت است از $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(y) \sin\frac{n\pi}{L}x$ و تحت شرایط مرزی $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$ عبارت است از:

$$u(x,y) = \frac{1}{2}Y_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y)\cos\frac{n\pi}{L}x$$

تذکر: برای محاسبه $T_n(t)$ و $Y_n(t)$، $T_0(t)$ و $Y_0(t)$ بایستی جواب را در معادله قرار دهیم.

برای بدست آوردن جواب منحصر به فرد شرایط دیگری لازم است که در هر مورد معادله حرارت، معادله موج یا معادله پواسون متفاوت است به این دلیل در ادامه بحث این ۳ معادله را به طور جداگانه بررسی می‌کنیم.

الف) معادله‌ی حرارت:

مثال: مسئله زیر را حل کنید. (شرایط مرزی): $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ ، $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (معادله حرارت همگن)

شرط اولیه: $u(x,0) = x(\pi - x)$

حل: با توجه به شرایط مرزی جواب عبارت است از:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi}{\pi}x \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin nx \quad (1)$$

برای محاسبه $T_n(t)$ مجهول جواب (1) را در معادله حرارت قرار می‌دهیم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t)\sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 T_n(t)\sin nx = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t) + n^2 T_n(t)\sin nx = 0$$

$$\Rightarrow T_n' + n^2 T_n = 0 \qquad T_n(t) = b_n e^{-n^2 t}$$

بنابراین:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t}\sin nx}$$

با اعمال شرط اولیه:

با توجه به فرمول بسط فوریه سینوسی

$$x(\pi - x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

داریم:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin nx\,dx$$

حل جزء به جزء داریم:

$\pi x - x^2$	$\sin nx$
$\pi - 2x$	$-\frac{1}{n}\cos nx$
-2	$-\frac{1}{n^2}\sin nx$
0	$\frac{1}{n^3}\cos nx$

PAPCO

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2-\pi x}{n}\cos nx + \frac{\pi-2x}{n^2}\sin nx - \frac{2}{n^3}\cos nx\right)\Big|_0^{\pi} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{\pi}\left(-\frac{2}{n^3}\cos n\pi + \frac{2}{n^3}\right) = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n^3}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}e^{-n^2t}\sin nx$$

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}e^{-(2n-1)^2t}\sin(2n-1)x$$

متعامد بودن در حالت کلی چون ② از زوج هم مثل حاصل را صفر می‌کند

مراحل حل: ① تشخیص n از sin بودن یا cos بودن ② قرار دادن در معادله (در واقع بخش جزئی گرفتن) ③ پیدا کردن T_n و اعمال شرط اولیه ④ تشخیص ضرایب فوریه کسینوسی یا سینوسی و حل انتگرال آن (معادله جواب کلی)

مثال ۲: مسئله زیر را حل کنید: معادله حرارت: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

شرایط مرزی: $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$ شرایط اولیه: $u(x,0) = x^2(1-x)^2$

حل: با توجه به شرایط مرزی جواب عبارت است از:

$$\frac{1}{2}T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cos\frac{n\pi}{1}x$$

برای محاسبه $T_n(t)$ جواب را در معادله قرار می‌دهیم.

$$\frac{1}{2}T_0'(t) + \sum_{n=1}^{\infty}T_n'(t)\cos n\pi x = \sum_{n=1}^{\infty}-n^2\pi^2T_n(t)\cos n\pi x \Rightarrow \frac{1}{2}T_0'(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n'(t) + n^2\pi^2T_n(t)\right)$$

چون جواب ! مقدار ثابت صفر ... $F(x) = 0$ ، $T_0'(t) = a_0$ (همان a0 در سری فوریه کسینوسی)، $T_n(t) = a_n e^{-n^2\pi^2t}$ (همان an در سری فوریه کسینوسی)

بنابراین جواب را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-n^2\pi^2t}\cos n\pi x$$

با اعمال شرط اولیه داریم:

$$x^2(1-x^2) = u(x,0) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$$

a_0:

$$2\int_0^1 x^2\underbrace{(x-1)^2}_{x^2-2x+1}dx = 2\int_0^1(x^4-2x^3+x^2)dx \Rightarrow \frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1$$

$$2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) \Rightarrow +\frac{1}{15}$$

$$a_n = 2\int_0^1(x^4-2x^3+x^2)\cos n\pi x\,dx \xrightarrow{\text{جزء به جزء}}$$

$x^4-2x^3+x^2$	$\cos n\pi x$
$4x^3-6x^2+2x$	$\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x$
$12x^2-12x+2$	$\frac{-1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$
$24x-12$	$\frac{-1}{n^3\pi^3}\sin n\pi x$
24	$\frac{1}{n^4\pi^4}\cos n\pi x$
0	$\frac{1}{n^5\pi^5}\sin n\pi x$

$$= \Big[2\Big(\frac{x^4-2x^3+x^2}{n\pi}\sin n\pi x + \frac{4x^3-6x^2+2x}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$$

$$-\frac{12x^2-12x+2}{n^3\pi^3}\sin n\pi x + \frac{24x-12}{n^4\pi^4}\cos n\pi x - \frac{24}{n^5\pi^5}\sin n\pi x\Big)\Big]_0^1$$

PAPCO

جای عدد ثابت ۱، از بازه‌ی صفر تا یک قرار می‌دهیم

$$u(x,t) = \frac{1}{30} - \frac{24}{14}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^4} e^{-n^2\pi^2 t} \cos n\pi x$$ → n باید فرد باشد چون آن زوج باشد حاصل را صفر می‌کند

مثال ۳: مسئله زیر را حل کنید

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = xt$$

شرایط مرزی: $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ شرایط اولیه: $u(x,0) = 0$

و اگر در مثال قبل برابر تی دی را جمع جمع شدن دیس لین بود که معادله برابر صفر بود ولی اینجا برابر xt می‌باشد

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin nx \xrightarrow{\text{ریز}} \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t) \sin nx + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 T_n \sin nx = xt$$

(جایگذاری در معادله برای محاسبه T_n)

با اعمال سری فوریه:

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (T_n' + n^2 T_n) \sin nx = xt \xrightarrow[\sin]{\text{سری فوریه}} T_n' + n^2 T = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xt \sin nx \, dx$$

جزء به جزء

x	$\sin nx$
1	$-\frac{1}{n}\cos nx$
0	$-\frac{1}{n^2}\sin nx$

$$\rightarrow T_n' + n^2 T = \frac{2t}{\pi}\left(\frac{-x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Big|_0^{\pi} \xrightarrow[\text{ساده}]{\text{جایگذاری حدود}}$$

$$\rightarrow T_n' + n^2 T = \frac{2t}{\pi}\left(\frac{-\pi}{n}(-1)^n\right) \rightarrow \boxed{T_n' + n^2 t = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} t}$$

$$T_n(t) = b_n e^{-n^2 t} + \frac{2}{n^3}(-1)^{n+1} t - \frac{2}{n^5}(-1)^{n+1}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n e^{-n^2 t} + \frac{2}{n^3}(-1)^{n+1}\left(t - \frac{1}{n^2}\right)\right] \sin nx$$

$$0 = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \frac{2}{n^5}(-1)^n \sin nx \rightarrow b_n + \frac{2}{n^5}(-1)^n = 0 \rightarrow b_n = \frac{2}{n^5}(-1)^{n+1}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^5}(-1)^{n+1} e^{-n^2 t} - \frac{2}{n^5}(-1)^{n+1} + \frac{2}{n^3}(-1)^{n+1} t] \sin nx$$

$$* \quad \boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3}(-1)^{n+1}\left(t - 1 + \frac{1}{n^2} e^{-n^2 t}\right) \sin nx}$$

PAPCO

معادلات موج :

معادله موج : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

مثال : شرایط مرزی : $u(0,t) = u(1,t) = 0$

شرایط اولیه
$$\begin{cases} u(x,0) = x(1-x) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

حل : بنا به شرایط مرزی جواب به شکل زیر است :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin n\pi x$$

با جای‌گذاری در معادله داریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) \sin n\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2\pi^2 T_n(t) \sin n\pi x$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n''(t) + n^2\pi^2 T_n(t)\right) \sin n\pi x$$

صفر یافتن مجهول T_n و T_n'' را داشتن

$$T_n''(t) + n^2\pi^2 T_n(t) = 0 \Rightarrow T_n(t) = a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t$$

بنابراین : (جای‌گذاری)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t) \sin n\pi x$$

همچنین :

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n\pi a_n \sin n\pi t + n\pi b_n \cos n\pi t) \sin n\pi x$$

با اعمال شرایط اولیه داریم :

$$x(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x$$

مقایسه b_n و a_n

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi b_n \sin n\pi x \quad , \quad b_n = 0$$

بنابراین جزء به جزء. درایه‌ها اشتباه

$x - x^2$	$\sin n\pi x$
$1 - 2x$	$-\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x$
-2	$-\frac{1}{n^2\pi^2} \sin n\pi x$
0	$\frac{1}{n^3\pi^3} \cos n\pi x$

$$a_n = 2\int_0^1 x(1-x) \sin n\pi x \, dx =$$

$$2\left(\frac{x^2 - x}{n\pi} \cos n\pi x + \frac{1-2x}{n^2\pi^2} \sin n\pi x - \frac{2}{n^3\pi^3} \cos n\pi x\right)\Big|_0^1$$

$$= 2\left(\frac{-2}{n^3\pi^3} \cos n\pi + \frac{2}{n^3\pi^3}\right) = \frac{4}{n^3\pi^3}\left(1 - (-1)^n\right) \Rightarrow u(x,t) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^3\pi^3}\left(1 - (-1)^n\right) \cos n\pi t \sin n\pi x$$

$(1 \; 0)$

n باید فرد باشد وگرنه جواب صفر می‌شود

PAPCO

منحنی تغییر مکان
حالت متحول

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \cos(2n-1)\pi t \sin(2n-1)\pi x$$

مثال ۲) شرایط مرزی : $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ (نوع دوم)

معادلهٔ موج : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

حل :

شرایط اولیه : $\begin{cases} u(x,0) = \cos x \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$

صرف محاسبه T_n حاصل:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos nx$$

با جایگذاری در معادله داریم :

$$\frac{1}{2} T_0''(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) \cos nx = \frac{1}{2} T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 T_n(t) \cos nx$$

(مشتق دوم ... صفر است)

$$\rightarrow \quad \frac{1}{2} T_0''(t) + \sum \left(T_n''(t) + n^2 T_n(t)\right) \cos nx = 0$$

$T_0'' = 0 \quad T_0(t) = a_0 + b_0 t \quad \rightarrow \quad T_n'' + n^2 T_n = 0 \quad \rightarrow \quad T_n(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt$

(مرتبه دوم)

بنابراین :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(a_0 + b_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \cos nx$$

همچنین :

$$u_t(x,t) = \frac{1}{2} b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-n a_n \sin nt + n b_n \cos nt) \cos nx$$

حال اعمال شرایط اولیه داریم :

$$\cos x = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad 0 = \frac{1}{2} b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \cos nx$$

بنابراین $a_1 = 1$ و $a_0 = 0$ و $a_n = 0 \ (n \geq 2)$ و $b_0 = 0$ و $b_n = 0$ بنابراین :

$$u(x,t) = \cos t \cos x$$

Subject :
Date

نکته ۳: اگر $T_0''(t)$ صفر جایی بود عبارت ثابتی مثل $T_0'(t)$ در جواب ظاهر نمی‌شد. اگر صفر نبود یعنی عبارت ثابتی $T_0'(t)$ در جواب $a_0 x$ در واقع اثر حاصل ... عبارت ... $T_0(t)$ در جواب $a_0 x^2 + ...$ بوده

($T_0''(t)$ صفر بود یعنی عدد ثابتی مثل $T_0'(t)$ عدد بود و مناهم کاملا T_0 $a_0 x$ بود)

مثال ۳: شرایط مرزی: $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$

معادله موج: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = xt$

شرایط اولیه:
$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

حل: با توجه به شرایط مرزی جواب به شکل زیر است:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\cos nx$$

جایگذاری در معادله داریم:

$$\frac{1}{2}T_0''(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t)\cos nx - \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 T_n(t)\cos nx = xt$$

$$\frac{1}{2}T_0''(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n''(t) + n^2 T_n(t)\right)\cos nx = xt \Rightarrow T_0''(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xt\,dx \Rightarrow$$

$$T_0''(t) = \pi t$$

$$\frac{2}{\pi}t\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \pi t \Rightarrow T_n'' + n^2 T_n = \frac{2t}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx$$

(جزء به جزء)

x	$\cos nx$
1	$\frac{1}{n}\sin nx$
0	$-\frac{1}{n^2}\cos nx$

$$= \frac{2t}{n}\left(\frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{2t}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\cos n\pi - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{2t}{n}\frac{(-1)^n-1}{n^2}$$

بنابراین:

$$T_n(t) = a_n\cos nt + b_n\sin nt + \frac{2t}{\pi}\frac{(-1)^n-1}{n^4}$$

$$T_0''(t) = \pi t \Rightarrow T_0'(t) = \frac{\pi}{2}t^2 + a_0 \Rightarrow T_0 = \frac{\pi}{6}t^3 + a_0 t + b_0$$

$$u(x,t) = \frac{\pi}{12}t^3 + \frac{1}{2}(a_0 t + b_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos nt + b_n\sin nt + \frac{2t}{\pi}\frac{(-1)^n-1}{n^4}\right\}\cos nx$$

همچنین:

$$u_t(x,t) = \frac{\pi}{4}t^2 + \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{-na_n\sin nt + nb_n\cos nt + \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n-1}{n^4}\right\}\cos nx$$

با اعمال شرایط اولیه داریم:

$$0 = \frac{1}{2}b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx \Rightarrow b_0 = a_n = 0$$

$$0 = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(nb_n + \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n-1}{n^4}\right)\cos nx \Rightarrow a_0 = 0 \;;\; b_n = \frac{-2}{\pi}\frac{(-1)^n-1}{n^5}$$

طرفین تساوی را به دلیل صفر کردن معادله

PAPCO

$$u(x,t) = \frac{\pi}{12}t^3 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\sin(2n-1)}{(2n-1)^5} - \frac{t}{(2n-1)^4}\right\}\cos(2n-1)x$$

تذکر: اگر معادله ناهمگن باشد و تابع ناهمگنی فقط تابع x باشد به روش زیر می‌توان معادله را همگن کرد در این روش شرایط مرزی نیز می‌توانند ناهمگن باشند.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x)$$

شرایط مرزی: $u(0,t)=A \;;\; u(L,t)=B$

$u(x,0) = f(x) \qquad u_t(x,0) = g(x)$

← روش حل:

قرار می‌دهیم $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - c^2 w'' = F(x)$$

پس در صورتی که $-c^2 w'' = F(x)$ باشد داریم:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

شرایط مرزی:

$A = u(0,t) = v(0,t) + w(0)$

$w(0) = A \Rightarrow v(0,t) = 0 \qquad B = u(L,t) = v(L,t) + w(L)$

پس اگر $w(L) = B \Rightarrow v(L,t) = 0$ ، $w = w(x)$ را از روابط زیر بدست آورده باشیم:

$-c^2 w'' = f(x) \qquad w(0) = A \;;\; w(L) = B$

در این صورت داریم:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad v(0,t) = v(L,t) = 0$$

از طرفی شرایط اولیه به صورت زیر در می‌آید.

$u(x,0) = v(x,0) + w(x) = f(x) \rightarrow v(x,0) = f(x) - w(x)$

$u_t(x,0) = v_t(x,0) = g(x) \rightarrow \boxed{v_t(x,0) = g(x)}$

معادله پواسن :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x,y)$$

شرایط مرزی به علت تقارن همانطور روی x یا روی y در نظر گرفته شود در خلاف معادلات موج و حرارت امثل متن موضوع شرط مرزی داریم :

1) $u(0,y) = u(L,y) = 0$ 2) $u_x(0,y) = u_x(L,y) = 0$

در اینجا برای تعیین جواب یکتا به جای شرط اولیه معادله حرارت با شرایط اولیه معادله موج دو شرط مرزی روی متغیر در نظر می‌گیریم در واقع در معادله پواسن همه شرایط ، شرایط مرزی هستند

تذکر : وقتی مسئله مطرح می‌شود شرایط را در ابتدا به عنوان شرط مرزی برای نوشتن جواب در نظر بگیریم که همگن باشد

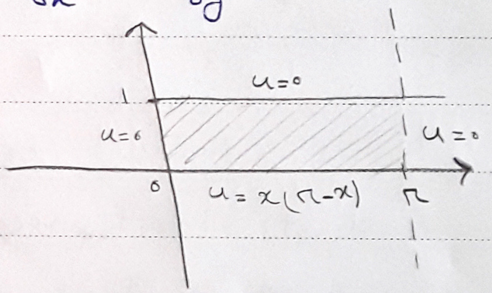
مثال :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$u(0,y) = u(\pi,y) = 0$

$u(x,0) = x(\pi - x)$

$u(x,1) = 0$



حل : با توجه به شرایط مرزی روی x جواب را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin nx$$

با جایگذاری در معادله داریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} -n^2 Y_n(y) \sin nx + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n''(y) \sin nx = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(Y_n''(y) - n^2 Y_n(y)\right) \sin nx = 0$$

بنابراین

$$Y_n''(y) - n^2 Y_n(y) = 0$$

$$Y_n(y) = a_n \cosh ny + b_n \sinh ny$$

پس

وجواب عبارت است از:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cosh ny + b_n \sinh ny\} \sin x$$

با اعمال شرایط مرزی دوم:

$$x(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

بنابراین:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin nx \, dx$$

$\pi x - x^2$	$\sin nx$
$(+)$ $\pi - 2x$	$-\frac{1}{n}\cos nx$
$(-)$ -2	$-\frac{1}{n^2}\sin nx$
$(+)$ 0	$\frac{1}{n^3}\cos nx$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{x^2 - \pi x}{n}\cos nx + \frac{\pi - 2x}{n^2}\sin nx - \frac{2}{n^3}\cos nx\right\}\Bigg]_0^{\pi}$$

$$\frac{2}{\pi}\left\{\frac{-2}{n^3}(-1)^n + \frac{2}{n^3}\right\} = \frac{4}{\pi n^3}\left(1 - (-1)^n\right)$$

همچنین:

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \cosh n + b_n \sinh n\}\sin nx$$

$$a_n \cosh n + b_n \sinh n = 0 \longrightarrow b_n = -a_n \coth n$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^3}\left(1-(-1)^n\right)\{\cosh ny - \coth n \sinh ny\}\sin nx$$

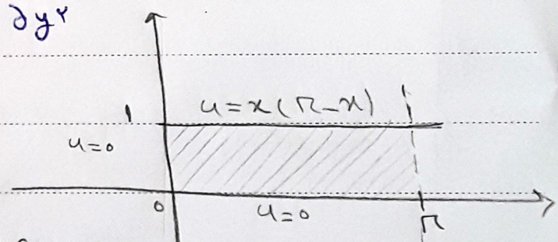
مثال ۳:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$u(0,y) = u(\pi,y) = 0$

$u(x,0) = 0$

$u(x,1) = x(\pi - x)$



حل: با توجه به شرایط مرزی روی x جواب را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y)\sin nx$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} -n^2 Y_n(y)\sin nx + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n''(y)\sin nx = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(Y_n''(y) - n^2 Y_n(y)\right)\sin nx = 0$$

PAPCO

بنابراین: $Y''_n - n^2 Y_n(y) = 0$

پس: $Y_n(y) = a_n\cosh ny + b_n\sinh ny$

و در جواب عبارت است از: $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cosh ny + b_n\sinh ny\}\sin nx$

با اعمال شرایط مرزی روی ... دوم: $0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin nx$

بنابراین $a_n = 0$ ← $x(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n\sinh n\pi)\sin nx$

$$b_n\sinh n\pi = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi-x)\sin nx\,dx = \frac{4}{\pi n^3}(1-(-1)^n)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi n^3\sinh n\pi}(1-(-1)^n)\sinh ny\,\sin nx$$

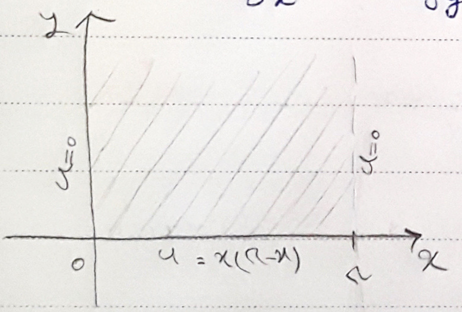
مثال ۳:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$u(0,y) = u(\pi,y) = 0$

$u(x,0) = x(\pi - x)$

$|u(x,\infty)| < M$



حل: با توجه به شرایط مرزی روی x جواب را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y)\sin nx$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} -n^2 Y_n(y)\sin nx + \sum_{n=1}^{\infty} Y''_n(y)\sin nx = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(Y''_n(y) - n^2 Y_n(y)\right)\sin nx = 0$$

بنابراین:

$Y''_n(y) - n^2 Y_n(y) = 0$

پس :

$$Y_n(y) = a_n e^{-ny} + b_n e^{ny}$$

و جواب عبارت است از :

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n e^{-ny} + b_n e^{ny}\right) \sin nx$$

با توجه به کران داری جواب در $y=\infty$ داریم $b_n = 0$ لذا

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-ny} \sin nx$$

$$x(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \longrightarrow a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin nx \, dx$$

$$a_n = \frac{4}{\pi n^3}\left(1-(-1)^n\right) \longrightarrow u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^3}\left(1-(-1)^n\right)$$

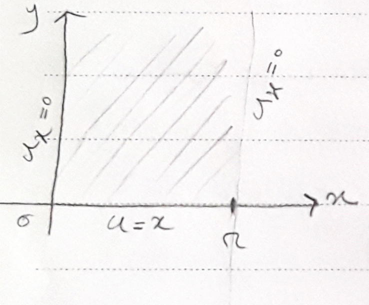
مثال ۴ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0$$

$$u(x,0) = x$$

$$|u(x,y)| < M$$



حل : با توجه به شرایط مرزی :

$$u(x,y) = \frac{1}{2} Y_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \cos nx$$

با جای گذاری در معادله داریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} -n^2 Y_n(y)\cos nx + \frac{1}{2} Y_0''(y) + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n''(y)\cos nx = 0$$

$$\frac{1}{2} Y_0''(y) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(Y_n''(y) - n^2 Y_n(y)\right)\cos nx = 0 \longrightarrow Y_0''(y) = 0 \longrightarrow Y_0(y) = a_0 + b_0 y$$

$$Y_n''(y) - n^2 Y_n(y) = 0 \longrightarrow Y_n(y) = a_n e^{-ny} + b_n e^{ny} \longrightarrow u(x,y) = \frac{1}{2}(a_0 + b_0 y) + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n e^{-ny} + b_n e^{ny}\right\} \cos nx$$

با توجه به کرانداری جواب در $y=\infty$ داریم : $b_0 = b_n = 0$

بنابراین

$$u(x,y) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-ny} \cos nx$$

همچنین

$$x = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

بنابراین :

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \, dx = \cdots$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \cdots$$

جواب معادله‌ی موج ← $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$

وحرارت ← $\frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$

با تحت شرایط مرزی $u(0,t)=0$ و کران داری در $x=\infty$ می‌توان به شکل زیر نوشت

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} T(p,t) \sin px \, dp$$

و تحت شرایط مرزی $u_x(0,t)=0$ و کران داری در $x=\infty$ عبارت است از:

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} T(p,t) \cos px \, dp$$

جواب تحت شرایط کران داری $x=\pm\infty$ به صورت زیر است:

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} \{T_1(p,t)\cos px + T_2(p,t)\sin px\} \, dp$$

همچنین جواب معادله پتانسیل

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$$

تحت شرایط مرزی $u(0,y)=0$ و کران داری در $x=\infty$ عبارت است از:

$$u(x,y) = \int_0^{+\infty} Y(p,y) \sin px \, dp$$

و تحت شرایط مرزی $u_x(0,y)=0$ و کران داری در $x=\infty$ عبارت است از:

$$u(x,y) = \int_0^{+\infty} Y(p,y) \cos px \, dp$$

همچنین تحت شرایط کران داری در $x=\pm\infty$ به صورت زیر است:

$$u(x,y) = \int_0^{+\infty} \{Y_1(p,y)\cos px + Y_2(p,y)\sin px\} \, dp$$

تذکر ①: برای بدست آوردن توابع Y و Y_1 ، Y_2 ، Y_3 و T ، T_1 ، T_2 ، T_3 بایستی جواب را در معادله قرار دهیم.

تذکر ②: برای بدست آوردن جواب یکتا مشابه حالت های متناهی برای معادله موج و حرارت شرایط اولیه و برای معادله پتانسیل شرایط مرزی به کار می‌بریم.

PAPCO

مثال ۵: جواب معادله حرارت $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ را تحت شرایط مرزی $u(0,t)=0$ و کران دار در $x=\infty$ و شرط اولیه $u(x,0)=f(x)=\begin{cases}1 & 0<|x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$ را بدست آورید.

با توجه به شرایط مرزی جواب به صورت زیر است:

$$u(x,t)=\int_0^{+\infty}T(p,t)\sin px\,dp$$

برای بدست آوردن T جواب را در معادله قرار می دهیم:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial T}{\partial t}\sin px\,dp=\int_0^{+\infty}-p^2T(p,t)\sin px\,dp\Rightarrow\int_0^{+\infty}\left(\frac{\partial T}{\partial t}+p^2T\right)\sin px\,dp=0$$

بنابراین:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+p^2T=0$$

پس T به صورت زیر از معادله فوق بدست می آید:

$$T=T(p,t)=A(p)e^{-p^2t}\xrightarrow[\text{به صورت زیر در می آید}]{\text{بنابراین جواب}}u(x,t)=\int_0^{+\infty}A(p)e^{-p^2t}\sin px\,dp$$

با قرار دادن شرط اولیه در این جواب داریم:

$$f(x)=\int_0^{+\infty}A(p)\sin px\,dp$$

با توجه به فرمول معکوس ضرایب تبدیل فوریه انتگرال سینوسی تابع $f(x)$ داریم:

$$A(p)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(x)\sin px\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{1}\sin px\,dx=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos px}{p}\right)\Big|_0^1\Rightarrow$$

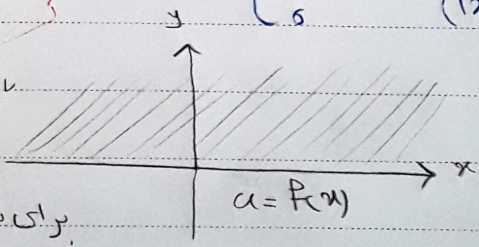
$$\frac{2}{\pi}\left\{-\frac{\cos p}{p}+\frac{1}{p}\right\}\Rightarrow$$ بنابراین: $$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1-\cos p}{p}\right)e^{-p^2t}\sin px\,dp$$

مثال ۶: جواب معادله لاپلاس $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ را تحت شرایط کران دار در $x=\pm\infty$ و در $y=\infty$ و

$u(x,0)=f(x)=\begin{cases}1 & (|x|<1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$ را بدست آورید.

با توجه به شرایط مرزی جواب به صورت زیر است:

$$u(x,y)=\int_0^{+\infty}\{Y_1(p,y)\cos px+Y_2(p,y)\sin px\}dp$$



برای بدست آوردن Y_1 و Y_2 جواب را در معادله قرار می دهیم:

$$\int_0^{+\infty}-p^2\{Y_1(p,y)\cos px+Y_2(p,y)\sin px\}dp+\int_0^{+\infty}\left\{\frac{\partial^2 Y_1}{\partial y^2}\cos px+\frac{\partial^2 Y_2}{\partial y^2}\sin px\right\}dp=0$$

بنابراین: $\int_0^{+\infty}\left\{\left(\frac{\partial^2 Y_1}{\partial y^2}-p^2Y_1\right)\cos px+\left(\frac{\partial^2 Y_2}{\partial y^2}-p^2Y_2\right)\sin px\right\}dp=0$

پس

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial y^2}-p^2Y_1=0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 Y_2}{\partial y^2}-p^2Y_2=0 \Rightarrow \begin{cases} Y_1=A_1(p)e^{-py}+B_1(p)e^{py} \\ Y_2=A_2(p)e^{-py}+B_2(p)e^{py}\end{cases}$$

پس جواب به صورت زیر در می‌آید

$$u(x,y)=\int_0^{\infty}\left\{\left(A_1(p)e^{-py}+B_1(p)e^{py}\right)\cos px+\left(A_2(p)e^{-py}+B_2(p)e^{py}\right)\sin px\right\}dp$$

B به علت ضریب e^{py} که بی‌نهایت می‌شود

باید B_1 و B_2 صفر شوند تا محدود برابر

با توجه به کران‌دار بودن جواب در $y=\infty$ داریم $B_1(p)=B_2(p)$ لذا:

$$u(x,y)=\int_0^{\infty}\left\{A_1(p)\cos px+A_2(p)\sin px\right\}e^{-py}dp$$

با اعمال شرط مرزی روی محور xها داریم: (e^{py} را حذف کنیم)

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\left\{A_1(p)\cos px+A_2(p)\sin px\right\}dp$$

بنابراین

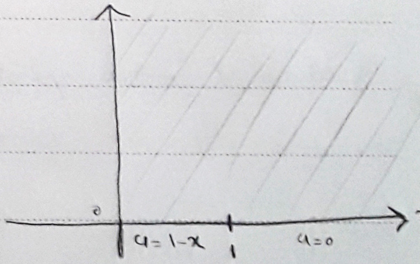
$$A_1(p)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos px\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos px\,dx=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\sin px}{p}\right\}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{2\sin p}{p}\right\}$$

$$A_2(p)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin px\,dx=0$$

(تابع فرد حاصل انتگرال صفر شد)

مثال ۳: جواب معادله لاپلاس $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ تحت شرایط $u_x(0,y)=0$ و کران‌دار در $x=\infty$ همچنین کران‌دار در $y=\infty$ و شرط $u(x,0)=f(x)=\begin{cases}1-x & 0<x<1\\ 0 & x>1\end{cases}$ به دست آورید.

$$u(x,y)=\int_0^{+\infty}Y(p,y)\cos px\,dp$$



طبق جایگذاری در معادله داریم:

$$\int_0^{+\infty}-p^2Y(p,y)\cos px\,dp+\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\cos px\,dp$$

$$\Rightarrow \int\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}-p^2Y\right)\cos px\,dp=0 \qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}-p^2Y=0 \rightarrow Y=A(p)e^{-py}+B(p)e^{py}$$

بنابراین:

$$u(x,y)=\int_0^{+\infty}\left\{A(p)e^{-py}+B(p)e^{py}\right\}\cos px\,dp$$

$$u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct) = \frac{1}{2} f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(\eta)\,d\eta - \frac{1}{2}k$$

$$+ \frac{1}{2} f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} g(\eta)\,d\eta + \frac{1}{2}k$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\eta)\,d\eta$$

« پایان فصل اول »

« فصل دوم »

اعداد مختلط ، توابع مختلط ، انتگرال های مختلط

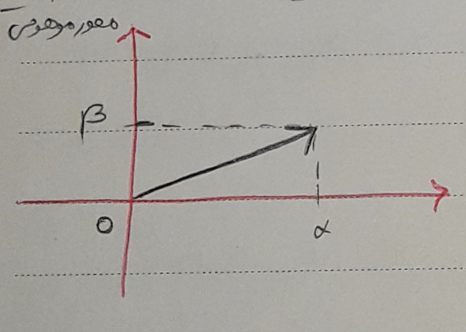
اعداد مختلط : به شکل $\alpha + i\beta$ که در آن α و β دو عدد حقیقی اند عدد مختلط گوییم

$Z = \alpha + i\beta$

α : جزء حقیقی $\quad \alpha = Re(Z)$

β : جزء موهومی $\quad \beta = Im(Z)$

با توجه به اینکه هر عدد مختلط با یک زوج مرتب اعداد حقیقی نمایش داده می شود لذا میتوان هر عدد مختلط را به یک نقطه در صفحه نمایش داد



← جمع و تفریق و ضرب اعداد مختلط مانند جمع و تفریق و ضرب دو جمله ای های جبری می شود تنها در عمل ضرب در آخر به جای i^2 عدد -1 قرار می دهیم و نتیجه را ساده می کنیم

نکته : حاصل جمع تفریق و ضرب و تقسیم اعداد مختلط عددی مختلط می شود

$(2+i)(3-2i) = 6 + 3i - 4i - 2i^2 \Rightarrow 8 - i \quad (i^2 = -1)$

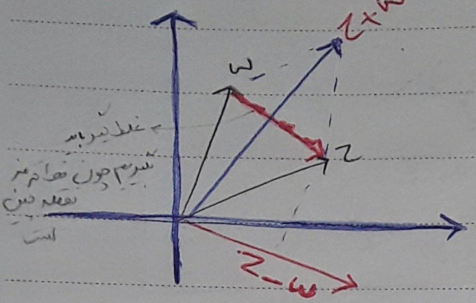
$(2+i) + (3-2i) = 5 - i$

$(2+i) - (3-2i) = -1 + 3i$

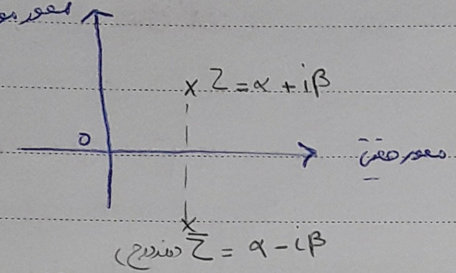
$$\frac{2+i}{3-2i} = \frac{2+i}{3-2i} \times \frac{3+2i}{3+2i} = \frac{6+4i+3i+2i^2}{9-4i^2} = \frac{4+7i}{13} \Rightarrow \frac{4}{13} + \frac{7}{13}i$$

Subject:
Date

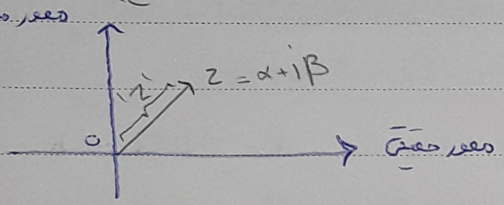
نکته: جمع دو عدد مختلط و تفاضل دو عدد مختلط از جمع و تفریق هندسی بردارهای نمایشگرشان پیروی می‌کند



برای نمایش هندسی اعمال ضرب، تقسیم، توان، ریشه ...
نیاز به مفاهیم قدر مطلق و آرگومان یک عدد مختلط داریم



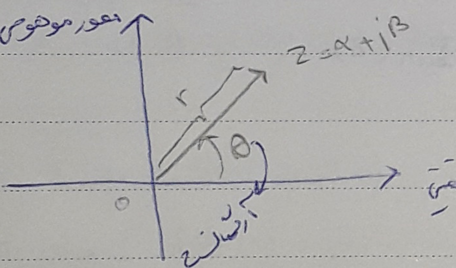
◄ نمایش مزدوج اعداد مختلط:



◄ نمایش قدر مطلق اعداد مختلط:

$$|z| = |\alpha + i\beta| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$z \cdot \bar{z} = \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow |z|^2$$



◄ نمایش آرگومان اعداد مختلط:

$$\theta = Arg(z)$$

نکته: $\beta = r\sin\theta$, $\alpha = r\cos\theta$

اگر $|z| = r$ و $\theta = Arg(z)$ ⟸ در این صورت

فرم مثلثی اعداد مختلط ⟵ $\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$

فرض کنید اعداد z و w مطابق زیر به فرم مثلثی باشند

$$w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad , \quad z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

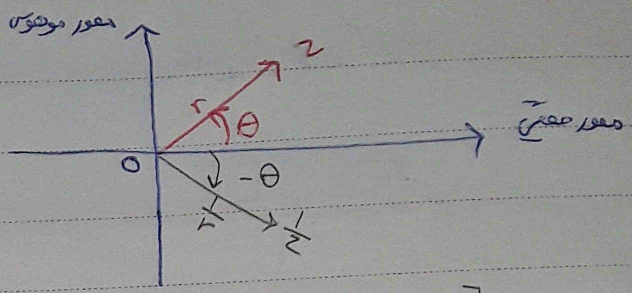
$z = w$ اگر و تنها اگر $r = \rho$ و $\theta - \varphi = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} \cdot \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{r(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} =$$

PAPCO

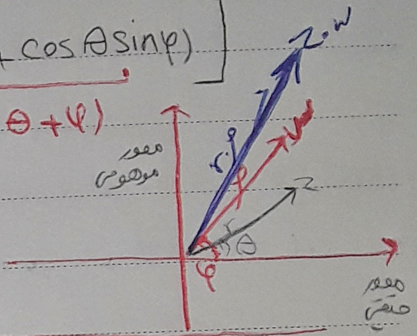
Subject:
Date

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right]$$



$$z.w = \rho.r\left[\underbrace{\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi}_{\cos(\theta+\varphi)} + i\underbrace{(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi)}_{\sin(\theta+\varphi)}\right]$$

$$z.w = \rho.r\left[\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)\right]$$



حل معادله $z^n = w$ اگر z مجهول و w معلوم باشد،

$w = \rho(\cos\varphi + i\sin\phi) = \rho e^{i\phi}$

در این صورت معادله دارای n جواب (ریشه) به صورت زیر است:

$$z = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\frac{2k\pi+\phi}{n} + i\sin\frac{2k\pi+\phi}{n}\right] = \sqrt[n]{\rho}\, e^{\frac{2k\pi+\phi}{n}i}$$

که در آن k مقادیر ۰، ۱، ... ، n-1 را اختیار می‌کند

مثال: معادلات زیر را حل کنید

الف) $z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z^2 = -1$, $z = \pm\sqrt{-1}$, $z = \pm i$, $-1 = \rho(\cos\varphi + i\sin\phi) =$

ب) $z^3 + 8 = 0$, $z^3 = -8$, $\rho = |-8| = 8$, $\varphi = \arg(-8) = \pi \Rightarrow z = \sqrt[3]{8}\, e^{\frac{2k\pi+\pi}{3}i}$, $k(0,1,2)$

$z_1 = 2e^{\frac{\pi}{3}i} \rightarrow 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$z_2 = 2e^{\pi i} \rightarrow 2(\cos\pi - i\sin\pi)$

$z_3 = 2e^{\frac{5\pi}{3}i} \rightarrow 2(\cos\frac{5\pi}{3} - i\sin\frac{5\pi}{3})$

(حل همه موارد دیگر با خودتان) (خودم)

ج) $z^4 + 1 = 0$, $z^4 = -1$

د) $z^6 + 1 = 0$, $z^6 = -1$

ه) $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$ — (حل)

و) $z^4 + 8z^2 + 25 = 0$ (دو روش) [illegible]

$$z^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases}$$

$z^2 = -1 \rightarrow z = \pm i$

$z^2 = -2 \rightarrow z = \pm i\sqrt{2}$

PAPCO

Subject:
Date

حل) $z^4 + 8z^2 + 25 = 0 \rightarrow (z^2 + 5)^2 - 2z^2 = 0 \rightarrow (z^2 - \sqrt{2}z + 5)(z^2 + \sqrt{2}z + 5)$

$z = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2-20}}{2}$; $\frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2-20}}{2} \rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{18}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{18}}{2}$

تابع : $w = f(z)$ را که در آن z یک متغیر مختلط و w یک متغیر مختلط باشد را تابع مختلط می‌نامیم. اگر $z = x + iy$ و $w = u + iv$ باشد در این صورت با توجه به اینکه $w = f(z)$ است بنابراین می‌توان u و v را توابعی از x و y در نظر گرفت

$$w = u(x,y) + iv(x,y)$$

در صورتی که $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ به فرم قطبی باشد داریم :

$$w = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$$

بنابراین :

توابع چندجمله‌ای عبارتند از :

$$w = f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

و توابع کسری :

$$w = f(z) = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_n}$$

را که با اعمال جبری روی متغیر z بدست می‌آوریم

و به ازای هر دو تابع دو متغیره حقیقی $u = u(x,y)$ و $v = v(x,y)$ یک تابع مختلط به صورت زیر داریم :

$$w = u(x,y) + iv(x,y)$$

و به ازای هر دو تابع دو متغیره حقیقی $u = u(r,\theta)$ و $v = v(r,\theta)$ یک تابع مختلط به صورت زیر داریم :

$$w = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$$

PAPCO

مثال ۲: تابع $w = f(z) = z^2$ را برحسب مولفه‌هایش بنویسید.

حل ← اگر $z = x+iy$ باشد در این صورت:

$$w = z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u} + i(\underbrace{2xy}_{v})$$

(i^2) می‌شود منفی یک پس پشت y^2 یک علامت (-) می‌آید

اگر $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ باشد در این صورت:

$$w = z^2 = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^2 \Rightarrow r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \Longrightarrow \underbrace{r^2\cos 2\theta}_{u} + i\underbrace{r^2\sin 2\theta}_{v}$$

نکته: $\cos^2\theta$, $\sin^2\theta$ برحسب فرمول‌های مثلثاتی 2θ حل شود

مثال ۳: تابع $w = f(z) = \frac{1}{z}$ را برحسب مولفه‌هایش بنویسید.

حل: اگر $z = x+iy$ باشد در این صورت:

$$w = f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy}$$

(برای حذف i از مخرج، صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب)

$$\Rightarrow \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \underbrace{\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)}_{u} + i\underbrace{\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)}_{v}$$

اگر $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ باشد در این صورت:

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} \quad \text{(در مزدوج مخرج ضرب)} \quad \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{r(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \underbrace{\left(\frac{\cos\theta}{r}\right)}_{u} + i\underbrace{\left(\frac{-\sin\theta}{r}\right)}_{v}$$

← مشتق تابع مختلط: اگر تابع مختلط $w = f(z)$ یک تابع چندجمله‌ای یا یک تابع کسری باشد، مطابق روش محاسبه مشتق توابع حقیقی مشتق آن قابل محاسبه است. در واقع قواعد مشتق‌گیری کماکان برقرارند. به‌عنوان مثال:

الف) $w = z^2 + 5z \longrightarrow w' = 2z + 5$

ب) $w = \frac{z+2}{z-1} \longrightarrow w' = \frac{1(z-1) - 1(z+2)}{(z-1)^2} \rightarrow w' = \frac{-3}{(z-1)^2}$

مشتق تابع مختلط که به شکل زیر تعریف شده است $w = u(x,y) + iv(x,y)$ به صورت های زیر محاسبه می شود

الف) $w' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$ ب) $w' = -i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)$

و در صورتی تابع مشتق پذیر است که دو روش به یک نتیجه منجر شود در واقع بایستی روابط زیر برقرار باشند تا مشتق پذیر باشد

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

این روابط به روابط معادلات کشی - ریمان معروفند

اگر تابع مختلط به شکل زیر تعریف شود ← $w = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$

مشتق به یکی از دو روش زیر محاسبه می‌شود:

الف) $w' = e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)$

ب) $w' = \frac{-i}{re^{i\theta}}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + i\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)$

در صورتی تابع مشتق پذیر است که دو روش منجر به یک نتیجه باشد به عبارت دیگر فرم قطبی معادلات کشی - ریمان به صورت زیر برقرار باشد

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{-1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases}$$

تعریف: تابع $w = f(z)$ را تام گوییم هرگاه در تمام نقاط صفحه مختلط مشتق پذیر باشد

تعریف: تابع $w = f(z)$ را در یک نقطه تحلیلی گوییم هرگاه در همه نقاط درون یک دایره به مرکز آن نقطه مشتق پذیر باشد.

تابع نمایی مختلط: $[w = e^z]$

$$w = e^z = e^{x+iy} = \underbrace{e^x \cos y}_{u} + i\,\underbrace{e^x \sin y}_{v}$$

بدیهی است که این تابع در کل صفحه مختلط تعریف شده است حال نشان می دهیم تابع نمایی یک تابع تام است

Subject:
Date

الف) $w' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z$

هر دو صحیح است

ب) $w' = -i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -i(-e^x \sin y + i e^x \cos y) = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z$

$w = e^z \longrightarrow w' = e^z$

تابع لگاریتمی مختلط: $[w = \log z]$

$w = \log z = \log(re^{i\theta}) = \underbrace{\ln r}_{u} + i\underbrace{\theta}_{v}$

مشتق این تابع

نکته: این تابع غیر از $z = 0$ همه جا معین و تعریف شده است.

الف) $w' = e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = e^{-i\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}$

$\longrightarrow w = \log z \longrightarrow w' = \frac{1}{z}$

هر دو روش برقرار صحیح است

ب) $w' = \frac{-i}{re^{i\theta}}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + i\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) = -\frac{i}{z}(i) = \frac{1}{z}$

مثال ۴: معادله $e^z = 1 + i\sqrt{3}$ را حل کنید

حل: $1 + i\sqrt{3}$ را به فرم قطبی می‌نویسیم تا بتوانیم مشتق آن را محاسبه کنیم

(حل به عهده خودمان)

$z = \log(1 + i\sqrt{3}) =$

← توابع هیپربولیک مختلط:

$$\begin{cases} \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \\ \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \\ \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} \\ \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z} \\ \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z} \end{cases}$$

← توابع مثلثاتی مختلط: «توابع مثلثاتی مختلط در صفحه بعد توضیح داده شده اند.»

PAPCO

۱) $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ ۲) $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ ۳) $tg\, z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$

۴) $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$ ۵) $\sec z = \dfrac{1}{\cos z}$ ۶) $\csc z = \dfrac{1}{\sin z}$

← توابع سینوس و کسینوس برحسب مولفه‌ها:

$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

(بسط دو جمله‌ای sin)

$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

(بسط دو جمله‌ای cos)

$|\sin z|^2 = \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y = \sinh^2 y + \sin^2 x(\cosh^2 y - \sinh^2 y)$ ، $\cos^2 x \to 1-\sin^2 x$

$\Rightarrow$ $|\sin z|^2 = \sinh^2 y + \sin^2 x$

به همین ترتیب برای cos داریم: $|\cos z|^2 = \sinh^2 y + \cos^2 x$

تابع ریشه: $w = f(z) = z^{1/n} = (re^{i\theta})^{1/n} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)$

به طور کلی اگر $\alpha \in \mathbb{C}$ یک ثابت مختلط باشد داریم: $w = f(z) = z^{\alpha} = \exp(\alpha \operatorname{Log} z)$

درصورتی که $\alpha \in \mathbb{R}$ یک ثابت حقیقی باشد داریم: $w = f(z) = z^{\alpha} = r^{\alpha}(\cos\alpha\theta + i\sin\alpha\theta)$

← تذکر: مشتق توابع مثلثاتی و هیپربولیک و تابع $w = z^{\alpha}$ مشابه مشتق توابع حقیقی متناظر آن‌ها است.

مثال ۵: در هر یک از موارد زیر z را به دست آورید.

الف) $e^z = 1 + i\sqrt{3}$

روش دوم حل الف) $z = \operatorname{Log}(1+i\sqrt{3}) = \operatorname{Ln} 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$

Subject:
Date

$r=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$

الف) $e^{z}=1+i\sqrt{3}=e^{x}(\cos y+i\sin y)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ روش اول

فرم قطبی — این قسمت باید به فرم قطبی بنویسیم — می‌توانیم این عدد را به فرم قطبی بنویسیم

$e^{x}=2 \rightarrow x=\ln 2$

$\rightarrow z=(x+iy)=\ln 2+i(2k\pi+\pi/3)$

$y-\frac{\pi}{3}=2k\pi \rightarrow y=2k\pi+\frac{\pi}{3}$ مضرب صحیح دو

ب) $\sin z=i$

$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=i \Rightarrow e^{iz}-e^{-iz}=2i^{2} \Rightarrow e^{iz}-e^{-iz}=-2 \xrightarrow[e^{iz}\text{ ضرب}]{\text{طرفین در}}$

$(e^{iz})^{2}-1=-2e^{iz} \Rightarrow (e^{iz})^{2}+2e^{iz}-1=0 \xrightarrow{\text{فرمول}} e^{iz}=-1\pm\sqrt{1+1}=-1\pm\sqrt{2}$

$(a^{2}\pm 2ab-1)$ مانند فرمول همان a و b در معادله درجه ۲

ج) $\cos z=2$

$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=2 \Rightarrow e^{iz}+e^{-iz}=4 \xrightarrow[e^{iz}\text{ ضرب}]{\text{طرفین در}} (e^{iz})^{2}+1=4e^{iz} \rightarrow (e^{iz})^{2}-4e^{iz}+1$ معادله

$\Delta=b^{2}-4ac$
$16-4=12$

$e^{iz} \rightarrow 2\pm\sqrt{4-1}$: $2+\sqrt{3}$ ، $2-\sqrt{3}$

$iz=\operatorname{Log}(2+\sqrt{3})$

$iz=\operatorname{Log}(2-\sqrt{3})$

د) $z=(-i)^{i}$ استفاده از فرمول — $z^{\alpha}=\exp \alpha \operatorname{Log} z$

$(-i)^{i}=\exp(i\operatorname{Log}(-i)) \longrightarrow \exp\{i(\ln|-i|+i\arg(-i))\} \rightarrow \exp\{i(\ln 1+i(2k\pi-\pi/2))\}$ صفر

$e^{iz}=-1-\sqrt{2}$ ، $-1+\sqrt{2}$ ادامه حل (ب)

$iz=\operatorname{Log}(-1-\sqrt{2})=\ln(\sqrt{2}+1)+i(\pi+2k\pi)$ قدر مطلق

طرفین در i ضرب: $z=(2k+1)\pi-i\ln(\sqrt{2}+1)$

$iz=\operatorname{Log}(\sqrt{2}-1)=\ln(\sqrt{2}-1)+2k\pi i \rightarrow z=2k\pi-i\ln(\sqrt{2}-1)$ طرفین بر i تقسیم

جواب کلی $=k\pi+(-1)^{k}i\ln(\sqrt{2}+1)$

برای $-1-\sqrt{2}$ ، $-1+\sqrt{2}$ اندازه منفی — خاک فاکتور بگیریم $-(+1+\sqrt{2})$

نکته: $\frac{1}{i}=-i$

ادامه حل (ج)

$iz=\operatorname{Log}(2+\sqrt{3})=\ln(2+\sqrt{3})+2k\pi i$ قدر مطلق

طرفین بر i تقسیم: $z=-i\ln(2+\sqrt{3})+2k\pi$

$iz=\operatorname{Log}(2-\sqrt{3})=\ln(2-\sqrt{3})+2k\pi i$ قدر مطلق

طرفین بر i تقسیم: $z=-i\ln(2-\sqrt{3})+2k\pi$

جواب کلی: $2k\pi\pm i\ln(2+\sqrt{3})$

ادامه حل (د)

$\exp\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \rightarrow e^{2k\pi+\pi/2}$

PAPCO

Date

مزدوج هارمونیک: اگر تابع مختلط $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ تحلیلی باشد (مشتق برقرار)

معادلات کشی-ریمان برقرار هستند

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}}_{①} \quad ; \quad \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}}_{②}$$

از آنجا داریم:

از ① برحسب x دوباره مشتق می‌گیریم: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ و از ② برحسب y دوباره مشتق می‌گیریم: $-\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}$$

معادله لاپلاس — هارمونیک: از ① و ② نتیجه می‌شود که:

همچنین می‌توان داشته باشیم که:

از ① برحسب y دوباره مشتق می‌گیریم: $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ و از ② برحسب x دوباره مشتق می‌گیریم: $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0}$$

از ① و ② نتیجه می‌شود که: هارمونیک:

$v = v(x,y)$ هارمونیک است

به طور خلاصه: مولفه‌های یک تابع مختلط هارمونیک هستند همچنین تابع $v = v(x,y)$ را مزدوج هارمونیک تابع $u = u(x,y)$ می‌نامیم.

مثال امتحانی: نشان دهید تابع زیر هارمونیک است و مزدوج هارمونیک آن را بدست آورید.

$$u(x,y) = e^x \cos y + 3x + x^2 - y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y + 3 + 2x \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \cos y + 2 \quad ①$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y - 2y \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \cos y - 2 \quad ②$$

جمع ① و ② برابر صفر $\rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ پس تابع هارمونیک

مزدوج هارمونیک باید تحلیلی باشد (مشتق برقرار) $\rightarrow$

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \longrightarrow f(z) = \underbrace{e^x \cos y + 3x + x^2 - y^2}_{u(x,y)} + iv(x,y)$$

اولین
باید معادلات کشی-ریمان:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} e^x \cos y + 3 + 2x = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y + 2y \end{cases}$$

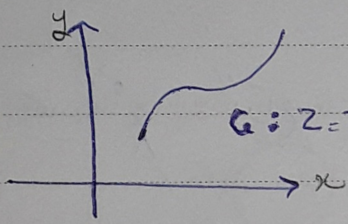
علامت معادله تم منفی می‌شود.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{x}\sin y + 2y \xrightarrow{\text{انتگرال نسبت به } x} v = v(x,y) = e^{x}\sin y + 2xy + \varphi(y)$$

$$\rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = e^{x}\cos y + 3 + 2x = e^{x}\cos y + 2x + \varphi'(y) \rightarrow \varphi'(y) = 3$$

و یا بین معادلات کشی-ریمان اولی استفاده می‌کنیم

$$\varphi(y) = 3y + \text{ثابت} \rightarrow \boxed{v = v(x,y) = e^{x}\sin y + 2xy + 3y}$$



انتگرال توابع مختلط: اگر $f(z)$ یک تابع مختلط باشد و $C = z: z(t)$ ، $(\alpha \le t \le \beta)$ یک منحنی هموار مختلط باشد انتگرال تابع مختلط $f(z)$ روی مرز C را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$(\alpha \le t \le \beta)$

$$\int_C f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\,z'(t)\,dt$$

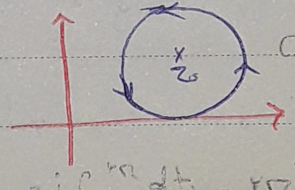
$$\oint_C f(z)\,dz$$

درصورتی که مرز C یک مرز بسته باشد از نماد زیر استفاده می‌کنیم.

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال زیر:

$$\oint \frac{dz}{z-z_0}$$

$C: |z-z_0| = r$



$C: z = z(t) = z_0 + re^{it}$

$0 \le t \le 2\pi$

$$\oint \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\,dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

$C: |z-z_0| = r$

← اگر تابع $f(z)$ را برحسب مولفه‌ها بنویسیم:

$$f(z) = f(x+iy) + iv(x,y)$$

و مرز C به شکل زیر باشد

$$C: z = z(t) = x(t) + iy(t) \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

در اینصورت:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\,z'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(x(t) + iy(t))(x'(t) + iy'(t))\,dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))\right]\left[x'(t) + iy'(t)\right] dt$$

Subject:
Date

$$= \int_{\alpha}^{\beta} [u(x(t), y(t))\, x'(t) - v(x(t), y(t))\, y'(t)]\, dt + i\int_{\alpha}^{\beta} [u(x(t), y(t))\, y'(t)$$

$$+ v(x(t), y(t))\, x'(t)]\, dt = \int_C u(x,y)\, dx - v(x,y)\, dy + i\int_C u(x,y)\, dy + v(x,y)\, dx$$

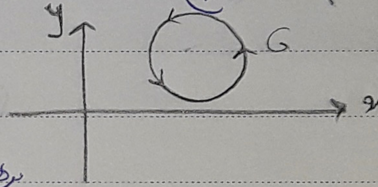
به طور خلاصه:

اگر $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ یک تابع مختلط باشد.

$$\int_C f(z)\, dz = \int_C u\, dx - v\, dy + i\int_C v\, dx + u\, dy$$

قضیه کُشی: اگر تابع مختلط $f(z)$ همه‌جا در درون و روی مرز ساده بسته G تحلیلی باشد در این صورت:

$$\oint_C f(z)\, dz$$



برهان - دیده‌ایم که:

$$\oint_C f(z) = \oint_C u(x,y)\, dx - v(x,y)\, dy + i\oint_C v(x,y)\, dx + u(x,y)\, dy$$

$$= \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\, dy + i\iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy$$ بنابه قضیه گرین:

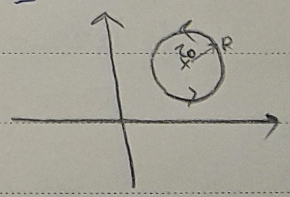
با توجه به اینکه تابع $f(z)$ تحلیلی است در همه نقاط درون و روی مرز C توانستیم رابطه بالا را بنویسیم از طرفی چون معادلات کشی - ریمان برقرار هستند لذا:

$$\oint_C f(z)\, dz = 0$$

مثال: انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\oint \left(\frac{1}{z - z_0} + e^{iz} + \sin z\right) dz$$

$|z - z_0| = 2$



$$\int \frac{1}{z - z_0} + \int e^{iz} + \int \sin z = 2\pi i$$

$2\pi i$

چون تحلیلی است از طریق قضیه گرین (صفر)

چون تحلیلی (طبق قضیه گرین) (صفر)

تابع تحلیلی: چندجمله‌ای‌ها ، $\sin$ و $\cos$ (توابع تام)

توابعی که در نقاط خاص تحلیلی نیستند: مثل توابع کسری ← ریشه مخرج توابع کسری تحلیلی نیستند. یا $\frac{1}{\sin z}$ ← ریشه‌های $\sin z$ $(n\pi)$ ریشه مخرج

PAPCO

Subject:
Date

تعریف: اگر تابع $f(z)$ در $z=z_0$ تحلیلی نباشد اما یک دایره به مرکز z_0 با شعاع ولو کوچک وجود داشته باشد به طوری که در همه نقاط آن دایره تحلیلی باشد گوییم $z=z_0$ نقطه تکین تنها تابع $f(z)$ است.

مثال: تابع $f(z)=\frac{1}{z-1}$ در همه جا غیر از $z=1$ تحلیلی است این نقطه را نقطه تکین تنها می‌نامند

* در تابع $f(z)=\frac{1}{z(z-1)}$ در همه جا غیر از نقاط $z=0$ و $z=1$ تحلیلی هستند و این دو نقطه تکین تنها هستند

* در تابع $f(z)=\frac{1}{\sin z}$ نقاط تکین تنها برابر با $z=n\pi$ می‌باشد

اگر $z=z_0$ یک نقطه تکین تنهای تابع $f(z)$ باشد در این صورت:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz \qquad C: |z-z_0|=\varepsilon$$

به ε بستگی ندارد و فقط تابع z_0 است مقدار این انتگرال را مانده تابع $f(z)$ در نقطه z_0 می‌نامیم

$$\underset{z=z_0}{\text{Res}}\, f(z)$$

بنابراین:

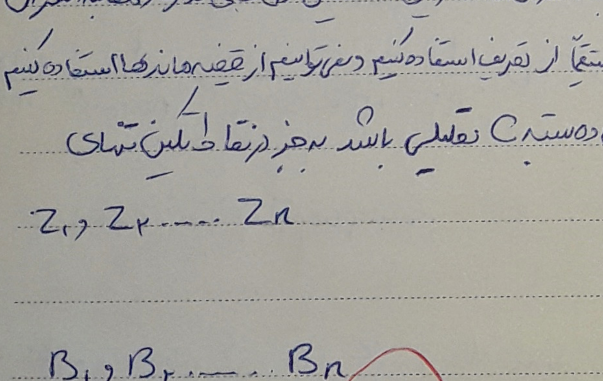
$$\underset{z=z_0}{\text{Res}}\, f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz \qquad C: |z-z_0|=\varepsilon$$

تذکر: روش‌هایی برای محاسبه مانده تابع در نقاط تکین وجود دارد که مهارت در به‌کارگیری آن‌ها ضامن موفقیت شما در امتحان است

① یافتن نقاط تکین ② بدست آوردن مانده در این نقاط تکین ③ جای‌گذاری در محاسبه انتگرال

← اگر تابع تحلیلی نبود باید مستقیماً از تعریف استفاده کنیم در غیر این صورت از قضیه مانده‌ها استفاده کنیم

← قضیه مانده‌ها: اگر تابع $f(z)$ همه جا در درون و روی مرز ساده بسته C تحلیلی باشد به جز در نقاط تکین تنهای $z_1, z_2, \dots, z_n$ درون مرزی به طوری که مانده تابع در این نقاط به ترتیب $B_1, B_2, \dots, B_n$ باشند در این صورت:



$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i(B_1+B_2+\dots+B_n)$$

Subject:
Date

فرض کنیم $z=z_0$ نقطه‌ی تکین تنهای تابع $F(z)$ باشد به طوری که عددی مانند n باشد که

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^n F(z)$$

موجود و متناهی و ناصفر باشد در این صورت نقطه $z=z_0$ را قطب مرتبه nام می‌نامیم. مانده در این قطب از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} F(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-z_0)^n F(z)$$

اگر $z=z_0$ قطب ساده باشد، (قطب مرتبه اول)

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} F(z) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) F(z)$$

اگر $z=z_0$ قطب مرتبه دوم باشد.

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} F(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{d}{dz} (z-z_0)^2 F(z)$$

تذکر: قبلاً برای قطب ساده در مورد تابع $\frac{p(z)}{q(z)}$ فرمول زیر گفته بودیم

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$ مشتق

مثال: مانده در نقاط تکین تنهای تابع $\frac{1}{z\sin z}$ را به دست آورید.

حل: نقاط تکین تنها ریشه‌های مخرج هستند $\quad z\sin z = 0 \quad z = n\pi \quad (n\in \mathbb{Z})$

اگر $n\neq 0$ باشد نقطه $z=n\pi$ قطب ساده است چون

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z\sin z}\right) = \left.\frac{1}{\sin z + z\cos z}\right|_{z=n\pi} \Rightarrow \frac{1}{\sin n\pi + n\pi\cos n\pi} = \frac{1}{n\pi(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n\pi}$$

$z=0$ قطب مرتبه دوم است.

$$\lim_{z\to 0} z^2 \frac{1}{z\sin z} = 1$$

(در z^2 ضرب کنم تا از حالت $\frac{0}{0}$ خارج شود)

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z\sin z} = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(z^2 \frac{1}{z\sin z}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{\sin z}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z - z\cos z}{\sin^2 z} = \frac{0}{0}$$ مبهم

(HOP دو بار برای رفع ابهام)

$$\lim_{z\to 0} \frac{\cos z - \cos z + z\sin z}{2\sin z\cos z} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{2\cos z} = 0$$

PAPCO

روش استفاده از سری ها در محاسبه مانده ها: با ذکر چند مثال توضیح دهید که چطور با استفاده از سری ها مانده ها را محاسبه می کنیم

حل

مثال: مانده تابع $\frac{1}{z^2\sin z}$ را در نقاط تکین تنها بدست آورید.

حل: نقاط تکین تنها صفرهای مخرج است.

$z^2\sin z=0 \longrightarrow z=n\pi \quad (n\in \mathbb{Z})$ اعداد صحیح

اگر $n\neq 0$ باشد

$$\operatorname{Res}\frac{1}{z^2\sin z}=\frac{1}{2z\sin z+z^2\cos z}\Big|_{z=n\pi}=\frac{1}{n^2\pi^2\cos n\pi}=\frac{1}{n^2\pi^2(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

محاسبه مانده در $z=0$

$\times z^3$ تا از حالت ∞ خارج شود

$$\lim_{z\to 0} z^3\,\frac{1}{z^2\sin z}=1$$

پس در نقطه $z=0$ قطب مرتبه سوم است.

برای حل دیگر از روش صفر قبل استفاده نمی کنیم از سری ها کمک می گیریم

$$\frac{1}{z^2\sin z}=\frac{1}{z^2\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots\right)}=\frac{1}{z^3\left(1-\frac{z^2}{6}+\frac{z^4}{120}-\dots\right)}=\frac{1}{z^3}\left(1+\frac{1}{6}z^2+\frac{7}{360}z^4+\dots\right)$$

$$=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{z}\right)+\frac{7}{360}z+\dots$$

(مانده: $\frac{1}{6}$)

$$1 \,/\, 1-\frac{1}{6}z^2+\frac{1}{120}z^4-\dots \Longrightarrow -\frac{1}{6}z^2+\frac{1}{36}z^4 \pm \frac{1}{720}z^4 = \left(\frac{1}{36}-\frac{1}{120}\right)z^4$$

مثال: مانده تابع $e^{1/z}$ در نقطه تکین بدست آورید. (مانده ← ضریب $\frac{1}{z}$)

تنها ← نقطه تکین $z=0$ است. و این نقطه تکین اساسی است. (ترکیب تابع کامل و کسری) ← تکین اساسی

با توجه به سری مکلورن تابع e^z داریم:

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots$$

بنابراین:

$$e^{1/z}=1+\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{2!}\right)\frac{1}{z^2}+\left(\frac{1}{3!}\right)\frac{1}{z^3}+\dots$$

$$\operatorname{Res}_{z=0} e^{1/z}=1$$

Date

محاسبه برخی انتگرال های حقیقی به کمک تئوری مانده ها :

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)\,d\theta$$ ← برای محاسبه انتگرال حقیقی

اگر مسیر C را دایره واحد در نظر بگیریم :

$$C: |z|=1 \quad ; \quad z = e^{i\theta} \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$$

در این صورت :

$$\begin{cases} dz = ie^{i\theta}d\theta \longrightarrow d\theta = \dfrac{dz}{iz} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \dfrac{1}{2i}\left(z-\dfrac{1}{z}\right) \\ \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right) \end{cases}$$

بنابراین

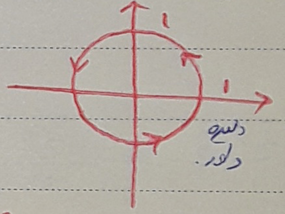
$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\,d\theta = \oint_{C:|z|=1} R\left(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz}$$

مثال ۳ : مطلوب است محاسبه ی انتگرال زیر :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$$

حل : بنا به فرمول انتگرال فوق برابر است با :

$$\oint_{C:|z|=1} \frac{1}{2+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz} = -2i\oint_{C:|z|=1}\frac{dz}{z^2+4z+1}$$



برای مشخص کردن نقاط تکین

$$\to z^2+4z+1=0 \qquad z = -2 \mp \sqrt{4-1} = \begin{cases} -2+\sqrt{3} \\ -2-\sqrt{3} \times \end{cases}$$

چون در داخل دایره واحد قرار نمی گیرد

قطب ساده

$$-2i\,(2\pi i)\operatorname*{Res}_{z=-2+\sqrt{3}}\left(\frac{1}{z^2+4z+1}\right) \Rightarrow 4\pi\left(\frac{1}{2z+4}\Big|_{z=-2+\sqrt{3}}\right) \Rightarrow 4\pi\left(\frac{1}{-4+2\sqrt{3}+4}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$$

(مشتق مخرج)

انتگرال های به صورت

$$P.V\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{q(x)}\,dx$$

را می توان به کمک تئوری مانده ها از فرمول زیر حساب کرد

$$P.V\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{q(x)}\,dx \Rightarrow 2\pi i\sum_{Im z_0>0}\operatorname*{Res}_{z=z_0}\frac{P(z)}{q(z)}$$

(نقاط تکینی که در نیم صفحه بالایی قرار دارند)

PAPCO

به شرطی که درجه مخرج حداقل دو واحد از درجه صورت بیشتر باشد.

تذکر: اگر تابع $f(x)$ زوج باشد

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\, p.v. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

مثال ۴: به کمک نظریه مانده‌ها انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$$

حل: بنابه فرمول انتگرال فوق برابر است با:

(چون $\frac{1}{2}$ در ۲ ضرب شده)

$$\pi i \sum_{Im z_0>0} \underset{z=z_0}{Res} \left(\frac{1}{z^4+1}\right)$$

نقاط تکین تابع $\frac{1}{z^4+1}$ صفرهای مخرج است

$$z^4+1=0 \Rightarrow z^4=-1 \Rightarrow z=(-1)^{1/4}$$

$$z_k = e^{\frac{2k\pi+\pi}{4}i} \quad k=0,1,2,3 \qquad z_1 = e^{\frac{\pi}{4}i}, \quad z_2 = e^{\frac{3\pi}{4}i}, \quad \cancel{z_3 = e^{\frac{5\pi}{4}i}}, \quad \cancel{z_4 = e^{\frac{7\pi}{4}i}}$$

نقاط آنهایی که در نیم صفحه بالا هستند قابل قبول

$$\pi i \left\{ \underset{z=e^{\pi/4 i}}{Res} \frac{1}{z^4+1} + \underset{z=e^{\frac{3\pi}{4}i}}{Res} \frac{1}{z^4+1} \right\} \underset{\text{مشتق از مخرج}}{\Rightarrow} \pi i \left\{ \frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{\pi/4 i}} + \frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{\frac{3\pi}{4}i}} \right\}$$

$$\Rightarrow \pi i \left\{ \frac{1}{4} e^{-\frac{3\pi}{4}i} + \frac{1}{4} e^{-\frac{9\pi}{4}i} \right\} \Rightarrow \frac{\pi}{4} i \left\{ e^{-\frac{3\pi}{4}i} + e^{-\frac{9\pi}{4}i} \right\} \Rightarrow \frac{\pi}{4} i \left\{ -e^{\pi/4 i} + e^{\ldots} \right.$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{4} i (2i) \sin\frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$$

همچنین فرمول‌های زیر برقرار هستند:

$$\boxed{p.v. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos\beta(x)\,dx = Re\left\{ 2\pi i \sum_{Im z_0>0} \underset{z=z_0}{Res} \frac{p(z)}{q(z)} e^{i\beta z} \right\}}$$

$$\boxed{p.v. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin\beta(x)\,dx = Im\left\{ 2\pi i \sum_{Im z_0>0} \underset{z=z_0}{Res} \frac{p(z)}{q(z)} e^{i\beta z} \right\}}$$

به شرطی که درجه مخرج حداقل یک واحد از درجه صورت بیشتر باشد.

PAPCO

Subject:
Date

مثال:

$$p.v \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x \, dx}{x^2 - 2x + 2} \Rightarrow$$

حل: با به فرمول انتگرال غیر برابر است با:

$$\mathrm{Im}\left\{2\pi i \sum_{\mathrm{Im}>0} \mathrm{Res} \left(\frac{z e^{iz}}{z^2 - 2z + 2} \right) \right\}$$

نقاط تکین

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \longrightarrow z = 1 \mp i$$

نقطه $1+i$ قابل قبول ← چون در نیم صفحه فوقانی است

$$\mathrm{Im}\left\{2\pi i \, \underset{z=1+i}{\mathrm{Res}} \, \frac{z e^{iz}}{z^2 - 2z + 2}\right\} \underset{\text{مشتق از مخرج}}{\Rightarrow} \mathrm{Im}\left\{2\pi i \, \frac{z e^{iz}}{2z - 2} \Big|_{z=1+i}\right\} \Rightarrow \mathrm{Im}\left\{2\pi i \left(\frac{(1+i) e^{-1+i}}{2+2i-2} \right)\right\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}\left\{\pi i \left(\frac{1+i}{2+i} \right) e^{-1} (\cos 1 + i \sin 1)\right\} \Rightarrow \mathrm{Im}\left\{\frac{\pi i}{e} \left(\frac{2 + 2i - i + 1}{4+1} \right) (\cos 1 + i \sin 1)\right\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}\left\{\frac{\pi}{e} i \, \frac{1}{5} (3 + i)(\cos 1 + i \sin 1)\right\} = \boxed{\frac{\pi}{5e}(3\cos 1 - \sin 1)}$$

مثال:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx \Rightarrow \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{2\pi i \sum_{\mathrm{Im} z > 0} \mathrm{Res}\right.$$

مانند تابع $\frac{1}{1+z}$ و $e^{1/z}$ ← $z = -1 , 0$

-1 ↓ قطب ساده

0 ↓ تکین اساسی ← حل سری

$$\frac{1}{1-z} = \underbrace{1 + z + z^2 + \cdots}_{\text{سری}}$$

$$\frac{1}{1+z} = \underbrace{1 - z + z^2 + \cdots}_{\text{سری}}$$

PAPCO